

# 绳摆一般振动\*

方奕忠, 林琼桂

(中山大学物理科学与工程技术学院, 广东 广州 510275)

**摘要:** 研究了由重绳和质点构成的绳摆一般振动, 给出了任意初始条件下解析解。一般振动包含基波与高次谐波, 后者是绳摆区别于复摆的主要特征。证明了本征函数族的广义正交性, 计算了本征函数模, 由初始条件计算出一般解中各系数。在质点与重绳质量比值远大于1和远小于1两种情况下, 求出了各本征频率解析近似结果。在前一情况下, 随着质量比值的增大, 高次谐波频率按其平方根增大, 而基波频率则趋于单摆频率; 在后一情况下, 各谐波频率均接近重绳本征频率。给出了一般参数下前五次谐波本征频率数值结果。指出了相关文献中一个错误。

**关键词:** 绳摆; 重绳; 一般振动; 解析解

**中图分类号:** O411.1, O31 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 02-0032-05

单摆是经典物理中一个重要模型。当实际摆近似满足一系列条件时, 可以理想化为单摆。这些条件是多方面的。比如摆锤很小, 可以当作质点(否则为复摆); 摆锤质量在振动(摆动)过程中保持不变(否则为沙漏摆); 摆锤与悬点之间由刚性杆连接(改为绳子则为绳摆); 刚性杆质量可以忽略(否则又是复摆); 空气阻力可以忽略(否则为阻尼摆); 地球自转效应可以忽略(否则为 Foucault 摆); 等等。当然还必须要求振幅(摆角)很小。否则虽不难写出运动方程, 但它是非线性方程, 求解要困难得多, 运动图像也复杂得多。设摆长(即刚性杆长度)为  $l$ , 则单摆振动角频率为  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ , 其中  $g$  是重力加速度。这是一个熟知的结果。按近代文献的习惯, 以下将角频率简称为频率。

如果刚性杆质量不能忽略, 这就是复摆一种比较简单形式。设质点质量为  $M$ , 杆质量为  $m$ , 则该复摆的振动频率为

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{\frac{M + m/2}{M + m/3}} \quad (1)$$

这也是一个熟知的结果。当  $m = 0$  时, 它就还原为单摆频率。

将上述刚性杆换为柔软的绳, 这就是绳摆。绳摆是人们感兴趣的一个古老问题。事实上, D. Bernoulli 在 1732 年讨论了重绳振动问题(转引自文献[1]), 但其中不包含质点, 所以属

于弦振动问题, 只是由于考虑了绳子本身重力而略为复杂。稍后, D. Bernoulli 和 L. Euler 还各自研究了绳摆与复摆的区别(转引自文献[2])。但直到近年仍有文献从不同角度讨论这一问题<sup>[2-5]</sup>。其中文献[3]由于作近似计算时方法不当, 得出不正确的基波频率。文献[2]、[4]和[5]用不同的方法得出正确结果, 但文献[2]的计算方法还是存在错误, 后面会作讨论。这些文献虽然给出了本征频率所满足的超越方程, 但主要都是关心基波, 而对于高次谐波和一般振动则未加以研究。实际上, 绳摆区别于复摆的主要特征在于高次谐波的出现, 即存在无穷多本征振动模式, 而复摆则只有一种振动模式。

本文的目的是研究绳摆一般振动, 即任意初始条件下的解析解。这通常包含各次谐波, 因此就涉及到本征函数族的正交性的证明, 模的计算等。然而, 由于这类问题中既涉及质量连续分布绳, 又涉及质量集中分布质点, 它们在数学物理方程中是一类比较特殊问题, 其定解问题在分离变量后导致非规范的 Sturm - Liouville (SL) 本征值问题, 因此其处理方法有一定特殊性。

如果忽略绳重力(其质量则永远不能忽略, 否则绳上不可能有波的传播), 这个问题就是文献上研究过的端点与集中质量(质点)连结的弦的横振动问题<sup>[6]</sup>, 或者说, 是后者的一种实现, 因为这里质点重力正好提供了绳中张力。如果绳在水

\* 收稿日期: 2007-06-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10675174); 国家自然科学基金重点基金资助项目(10235040)

作者简介: 方奕忠(1969年生), 男, 讲师, 博士; 通讯联系人: 林琼桂; E-mail: lingqiongwei@tsinghua.org.cn

平面上, 一端固定, 一段与质点连结, 则很难实现绳上张力。另一个相近的问题是端点与质点连结的弹性杆纵振动问题。虽然两者运动图像不同, 但相应的数学问题却是等价的。这些问题在近年的文献中也有不少研究<sup>[7-11]</sup>。

忽略绳的重力显然是不恰当的, 特别是当绳质量与质点质量相当甚至超过后者时。即使绳质量小于质点质量, 这种做法起码也是不完整的。考虑绳子重力后, 绳摆问题比上述文献 [6-11] 中所考虑的问题要复杂得多。虽然是一个古老的问题, 但就我们所知, 目前文献上还没有关于绳摆一般振动问题的完整处理, 所以我们在此给出有关计算结果。

本文所指的振动均为小振动, 按照同类问题的一般惯例, 以下不再强调这一点。

## 1 定解问题

考虑一根柔软重绳, 其线质量密度为  $\rho$ , 绳长为  $l$ , 总质量为  $m = \rho l$ 。绳上端固定, 下端系有质量为  $M$  的质点, 这就构成一个绳摆。平衡时, 绳在重力作用下自然下垂。在初始激励下, 绳和质点可以在平衡位置附近作横振动。

设绳摆在固定的竖直平面内运动。取绳摆固定端为坐标原点,  $x$  轴竖直向下, 绳摆运动平面为  $xy$  平面, 绳上  $x$  点在  $t$  时刻的位移为  $y = y(x, t)$ , 其中  $0 \leq x \leq l$ 。初始时刻, 绳位移为  $\varphi(x)$ , 速度为  $\psi(x)$ 。求以后各时刻位移。

运用 Newton 运动定律, 可得定解问题为

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial y}{\partial x} \right) \quad (0 < x < l, t > 0) \quad (2)$$

$$y|_{x=0} = 0, \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + g \frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = 0 \quad (3)$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \quad (4)$$

其中  $T = T(x, t)$  为  $t$  时刻绳上  $x$  处的张力, 可以证明它与  $t$  无关:

$$T(x) = Mg + \rho g(l - x) \quad (5)$$

## 2 一般解

分离变量, 令  $y(x, t) = X(x)H(t)$ , 可得本征值问题

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{T(x)}{\rho} \frac{dX(x)}{dx} \right] + \omega^2 X(x) = 0$$

$$X(0) = 0, \omega^2 X(l) - gX'(l) = 0 \quad (6)$$

和方程

$$H''(t) + \omega^2 H(t) = 0 \quad (7)$$

其中  $\omega^2$  为分离变量时引入的常数, 即本征值。由于边界条件 (6) 中出现本征值, 所以上述本征值问题不是规范的 SL 本征值问题, 从而无法由有关定理得出  $\omega^2 \geq 0$  的结论。但是, 我们可以用另一段绳代替质点, 此时定解问题具有常规边界条件, 分离变量后得到规范的 SL 本征值问题, 故  $\omega^2 \geq 0$ 。然后取极限, 使得后一段绳趋于质点。在这极限过程中, 虽然本征值的分布一直在变化, 但  $\omega^2 \geq 0$  应该保持成立。另一方面, 由式 (6) 可证

$$\omega^2 \left[ \int_0^l X^2(x) dx + l_M X^2(l) \right] = g \int_0^l (l_M + l - x) X'^2(x) dx \quad (8)$$

其中  $l_M = M/\rho$  是质点等效长度 (以绳线密度来衡量), 由此也可看出  $\omega^2 \geq 0$ 。所以将本征值记作  $\omega^2$  是恰当的。容易进一步证明,  $\omega = 0$  不是本征值, 所以  $\omega^2 > 0$ 。由于本征值问题中只出现  $\omega^2$ , 故只需考虑  $\omega > 0$ 。由式 (7) 容易看出,  $\omega$  就是绳摆的本征振动频率。记  $\omega = \alpha \omega_0$ , 则  $\alpha > 0$  是以单摆频率  $\omega_0$  为本征频率, 所以下面也将  $\alpha$  称为本征值。

方程 (6) 经过自变量变换后可以化为零阶 Bessel 方程, 其通解为

$$X(x) = CJ_0 \left( 2\alpha \sqrt{1 + \frac{M}{m} - \frac{x}{l}} \right) + DN_0 \left( 2\alpha \sqrt{1 + \frac{M}{m} - \frac{x}{l}} \right) \quad (9)$$

其中  $J_0$ 、 $N_0$  分别为零阶 Bessel 函数和零阶 Neumann 函数,  $C$ 、 $D$  为任意常数。

由边界条件 (6) 可得

$$CJ_0 \left( 2\alpha \sqrt{\frac{M}{m} + 1} \right) + DN_0 \left( 2\alpha \sqrt{\frac{M}{m} + 1} \right) = 0$$

$$C \left[ J_1 \left( 2\alpha \sqrt{\frac{M}{m}} \right) - \alpha \sqrt{\frac{M}{m}} J_0 \left( 2\alpha \sqrt{\frac{M}{m}} \right) \right] + D \left[ N_1 \left( 2\alpha \sqrt{\frac{M}{m}} \right) - \alpha \sqrt{\frac{M}{m}} N_0 \left( 2\alpha \sqrt{\frac{M}{m}} \right) \right] = 0 \quad (10)$$

这是  $C$ 、 $D$  的线性方程组, 有非零解的条件是系数行列式为 0, 由此得本征值  $\alpha$  满足超越方程:

$$J_0 \left( 2\alpha \sqrt{\frac{M}{m} + 1} \right) N_2 \left( 2\alpha \sqrt{\frac{M}{m}} \right) = N_0 \left( 2\alpha \sqrt{\frac{M}{m} + 1} \right) J_2 \left( 2\alpha \sqrt{\frac{M}{m}} \right) \quad (11)$$

其中利用了柱函数的递推公式<sup>[12-13]</sup>。我们知道, 对于规范的 SL 本征值问题, 存在无穷多分立本征值。虽然现在的本征值问题是非规范的, 但它可

由一个规范的本征值问题通过极限过程得到,所以  
我们期望上式也存在无穷多分立解。这一推测得到  
了数值计算的支持。将本征值谱记作  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 本  
征值的大小顺序与其下标的大小顺序一致。关于本  
征值的计算,后面再作讨论。

由于 C、D 受到线性方程组的限制,故其中只  
有一个是独立的。所以本征值是非简并的。第  $n$  个  
本征函数可取为

$$X_n(x) = N_0 \left( 2\alpha_n \sqrt{\frac{M}{m} + 1} \right) J_0 \left( 2\alpha_n \sqrt{1 + \frac{M}{m} - \frac{x}{l}} \right) - \\ J_0 \left( 2\alpha_n \sqrt{\frac{M}{m} + 1} \right) N_0 \left( 2\alpha_n \sqrt{1 + \frac{M}{m} - \frac{x}{l}} \right) \quad (12)$$

虽然现在的本征值问题是非规范的,但由式(6)  
不难证明仍有广义正交关系:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) dx + l_m X_m(l) X_n(l) = 0, m \neq n \quad (13)$$

由此可知现在本征函数的模方应该定义为

$$N_n = \|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) dx + l_m X_n^2(l) \quad (14)$$

由式(6)可以证明

$$N_n = \frac{l}{\alpha_n^2} (l_m + l)^2 X_n'^2(0) - \frac{\alpha_n^2}{l} l_m^2 X_n^2(l) \quad (15)$$

利用式(11)、(12)和柱函数的递推公式<sup>[12-13]</sup>,  
经过计算可得

$$N_n = \frac{l}{\pi^2 \alpha_n^2} \left[ 1 - \frac{J_0^2(2\alpha_n \sqrt{M/m + 1})}{J_2^2(2\alpha_n \sqrt{M/m})} \right] \quad (16)$$

式(7)对应于本征值  $\omega_n = \alpha_n \omega_0$  的通解为

$$H_n(t) = C_{1n} \cos \omega_n t + C_{2n} \sin \omega_n t \quad (17)$$

因此,原定解问题的一般解为

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \cos \omega_n t + C_{2n} \sin \omega_n t) X_n(x) \quad (18)$$

利用本征函数的正交关系(13),可以求出

$$C_{1n} = \frac{1}{N_n} \left[ \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx + \varphi(l) X_n(l) l_m \right] \\ C_{2n} = \frac{1}{N_n \alpha_n \omega_0} \left[ \int_0^l \psi(x) X_n(x) dx + \psi(l) X_n(l) l_m \right] \quad (19)$$

给定初始条件,原则上可以算出这些系数,把它们  
和  $X_n(x)$  的表达式代入式(18),就得到原定解问  
题的解析解。

这里存在一个问题:式(18)是否包含了一切  
可能的振动?或者说,是否可以满足任意给定的初  
始条件?这就涉及到本征函数族是否完备的问题。  
本文最后将对此作简要的评述。

### 3 本征值的解析近似计算

本征频率的计算是人们所关心的问题。事实  
上,文献[2-5]的主要工作就是计算绳摆基波近  
似频率并与单摆和复摆频率作比较。下面我们研究  
各谐波频率的计算。

本征频率由超越方程(11)决定,一般只能数  
值求解。但在两种极限情况下,可以求近似的解析  
解。

第一种情况是  $m \ll M$ , 即绳质量远小于质点质  
量。由柱函数渐近展开式<sup>[12-13]</sup>

$$J_n(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} \left[ P_n(\xi) \cos \left( \xi - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \right. \\ \left. Q_n(\xi) \sin \left( \xi - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ N_n(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} \left[ P_n(\xi) \sin \left( \xi - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ \left. Q_n(\xi) \cos \left( \xi - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (20)$$

其中

$$P_n(\xi) = 1 - \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{128\xi^2} + \dots \\ Q_n(\xi) = \frac{(4n^2 - 1)}{8\xi} - \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)(4n^2 - 25)}{3072\xi^3} + \dots \quad (21)$$

可将式(11)化为

$$[P_0(\xi_l) P_2(\xi_0) + Q_0(\xi_l) Q_2(\xi_0)] \tan(\xi_l - \xi_0) = \\ P_0(\xi_l) Q_2(\xi_0) - Q_0(\xi_l) P_2(\xi_0) \quad (22)$$

其中  $\xi_0 = 2\alpha\lambda^{-1/2}$ ,  $\xi_l = \xi_0(1 + \lambda)^{1/2}$ , 而  $\lambda = m/M$ 。  
将式(21)代入上式并作近似计算。现在  $\lambda \ll 1$ ,  
近似计算时,在包含多项的因子中,小项保留到与  
领头项之比为  $\lambda$  的一次方,则上式近似为

$$\alpha \tan \left[ \alpha \sqrt{\lambda} \left( 1 - \frac{\lambda}{4} \right) \right] = \sqrt{\lambda} \left( 1 + \frac{9\lambda}{32\alpha^2} - \frac{\lambda}{32} \right) \quad (23)$$

先看基波,易知最低阶近似解为  $\alpha_1 = 1$ 。将上式左  
边展开,保留到所述近似程度,得

$$\tan \left[ \alpha \sqrt{\lambda} \left( 1 - \frac{\lambda}{4} \right) \right] = \alpha \sqrt{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{4}\lambda + \frac{\alpha^2 \lambda}{3} + \dots \right) \quad (24)$$

代入式(23),并将小项中的  $\alpha$  用最低阶近似代  
替,可得

$$\alpha_1 = 1 + \frac{\lambda}{12} = 1 + \frac{1}{12} \frac{m}{M} \quad (25)$$

这是文献上已有的结果。将式(1)展开,可得复  
摆的  $\omega_c/\omega_0$  具有同样结果。值得指出,文献[2]

计算  $\alpha_1$  的方法和结果都与我们一致, 但该文中  $Q_n(\xi)$  的表达式只取一项, 这会导致计算过程中遗漏掉应该保留的两个小项, 原则上会导致错误结果, 但由于该文是由未经化简的本征值超越方程出发, 计算过程有所不同, 仔细检验可以发现, 其所遗漏的两项正好互相抵消, 于是得出了正确的结果。

再看高次谐波。此时不能再按式 (24) 作展开, 否则只能得到基波结果。结合几何方法, 易得  $n$  次谐波 (不包括基波, 下同) 最低阶近似解为  $\alpha_n = (n-1)\pi/\sqrt{\lambda}$ 。令  $\beta = \alpha\sqrt{\lambda}$ , 保留到所述近似程度, 可将式 (23) 化为

$$\tan\left[\beta\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)\right] = \frac{\lambda}{\beta}$$

其最低阶近似解为  $\beta_n = (n-1)\pi$ , 由此容易求得包含修正项的解为

$$\alpha_n = (n-1)\pi\sqrt{\frac{M}{m}} + \frac{(n-1)\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{M}} + \frac{1}{(n-1)\pi}\sqrt{\frac{m}{M}}, (n=2,3,\dots) \quad (26)$$

容易看出, 随着  $M/m$  的增大, 高次谐波频率按  $\sqrt{M/m}$  增大, 而前面的基波频率则趋于单摆频率, 这是它们的主要区别。这也可以从数值计算结果看出 (参看图 1)。

可以作解析近似计算的第二种情况是  $m \gg M$ , 即绳质量远大于质点质量。此时由式 (11) 可以看出,  $J_0(2\alpha\sqrt{M/m+1}) \sim \alpha^4(M/m)^2$ , 精确到  $M/m$  的一次方, 近似有  $J_0(2\alpha\sqrt{M/m+1}) = 0$ , 故  $2\alpha\sqrt{M/m+1} = x_{0n}$ , 其中  $x_{0n}$  是  $J_0(x) = 0$  的第  $n$  ( $n=1,2,\dots$ ) 个正根, 由此可得

$$\alpha_n = \frac{x_{0n}}{2}\left(1 - \frac{M}{2m}\right) \quad (27)$$

由解法可以看出, 对于给定的  $M/m$  值, 上式会随着  $n$  的增大而逐渐偏离准确解。另一方面, 对于给定的  $n$  值, 只要  $M/m$  足够小, 则上式总是近似成立的。

一种极端情况是  $M=0$ , 即没有质点。此时有精确结果

$$\alpha_n = \frac{1}{2}x_{0n} \quad (28)$$

这正是重绳本征频率 [1]。对于基波,  $\alpha_1 = 1.202$ 。对于只有刚性杆而没有质点的复摆, 则有  $\omega_c/\omega_0 = \sqrt{3/2} = 1.225$ 。两者非常接近。由于  $x_{0n}$  很容易计算, 上式为  $\alpha_n$  的数值计算提供了初始值。

## 4 本征值的数值计算

对于一般的质量参数, 方程 (11) 只能用数值方法求解。我们计算了前 5 个根  $\alpha_n$  ( $n=1, 2, 3, 4, 5$ ), 它们与  $M/m$  的函数关系如图 1 所示, 其中  $M/m$  的取值范围是  $0 \sim 100$ 。由于图 1 中纵坐标跨度太大, 使得第一条曲线的变化几乎看不出来, 所以图 2 中调整纵坐标单独画了第一条曲线的局部。

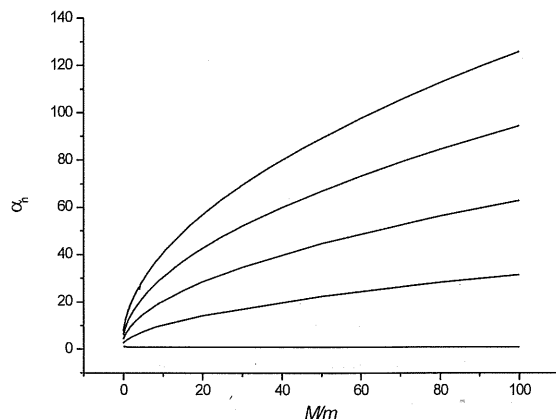


图 1 本征值  $\alpha_n$  与  $M/m$  的函数关系, 图中自下往上各曲线依次对应于  $n=1, 2, 3, 4, 5$

Fig. 1 The functional relation between the eigenvalue  $\alpha_n$  and  $M/m$ . The curves from bottom to top corresponds to  $n=1, 2, 3, 4, 5$  successively

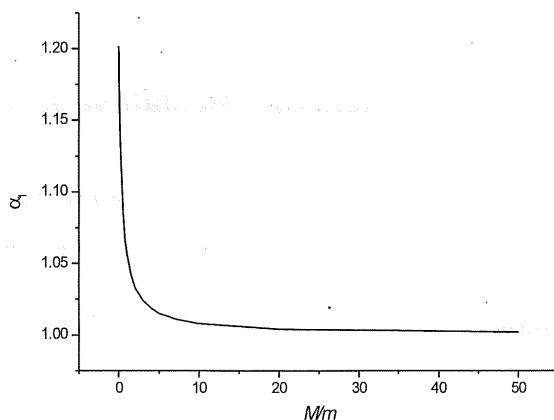


图 2 本征值  $\alpha_1$  与  $M/m$  的函数关系

Fig. 2 The functional relation between  $\alpha_1$  and  $M/m$

## 5 讨论

关于非规范的 SL 本征值问题, 有两个问题有待进一步研究: 一是是否存在无穷多分立本征值; 二是本征函数族是否完备。对于规范的 SL 本征值问题, 相关定理给出了肯定的结论, 但对于非规范

的本征值问题, 这些结论需要重新加以考察和论证。这一工作对于物理学家来说有一定的困难。目前文献上常见的做法是默认这些结论仍然成立, 即使象文献 [6] 这样比较深入的著作也是如此。这种状况是不能令人满意的, 所以我们把这两个问题指出来, 以期引起读者的关注。

#### 参考文献:

- [1] 拉夫连季耶夫 M A, 沙巴特 B B. 复变函数论方法 [M]. 施祥林, 等译. 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [2] EPSTEIN S T, OLSSON M G. Comment on "Effect of the mass of the cord on the period of a simple pendulum" [J]. Am J Phys, 1977, 45 (7): 671 - 672.
- [3] ARMSTRONG H L. Effect of the mass of the cord on the period of a simple pendulum [J]. Am J Phys, 1976, 44 (6): 564 - 566.
- [4] MONTGOMERY C G. Pendulum on a massive cord [J]. Am J Phys, 1978, 46 (4): 411 - 412.
- [5] GLEISER R J. Small amplitude oscillations of a quasi - ideal pendulum [J]. Am J Phys, 1979, 47 (7): 640 - 643.
- [6] 吉洪诺夫 A H, 萨马尔斯基 A A. 数学物理方程 (上册) [M]. 黄克欧, 等译. 北京: 高等教育出版社, 1956.
- [7] 程利青. 一种不规范的斯特姆 - 刘维本征值问题 [J]. 大学物理, 2003, 22 (2): 11 - 14.  
CHENG L Q. One question on the irregular Sturm-Liouville eigenvalue problem [J]. Coll Phys, 2003, 22 (2): 11 - 14.
- [8] 吴崇试. 也谈不规范的斯特姆 - 刘维本征值问题 [J]. 大学物理, 2004, 23 (6): 3 - 7.  
WU C S. Supplement to the paper "One question on the irregular Sturm-Liouville eigenvalue problem" [J]. Coll Phys, 2004, 23 (6): 3 - 7.
- [9] 林琼桂. 与质点连结的弹性杆的振动 [J]. 大学物理, 2004, 23 (3): 18 - 20.  
LIN Q G. Vibration of an elastic rod connected to a particle [J]. Coll Phys, 2004, 23 (3): 18 - 20.
- [10] 徐建军, 胡嗣柱. 用 Laplace 变换法求解端点系有集中质量的弹性杆的振动问题 [J]. 大学物理, 2004, 23 (12): 12 - 13.  
XU J J, HU S Z. Solving the vibration problem of an elastic rod with concentrated mass on one end by Laplace transformation [J]. Coll Phys, 2004, 23 (12): 12 - 13.
- [11] 徐建军, 胡嗣柱. 再论用 Laplace 变换法求解端点系有集中质量的弹性杆的振动问题 [J]. 大学物理, 2005, 24 (9): 4 - 6.  
XU J J, HU S Z. Solving the vibration problem of elastic rod with concentrated mass on one end by Laplace transformation [J]. Coll Phys, 2005, 24 (9): 4 - 6.
- [12] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.
- [13] GRADSHTEYN I S, RYZHIK I M. Tables of Integrals, Series, and Products [M]. 6th ed. New York: Academic, 2000.

## General Oscillation of a Pendulum with a Massive Cord

FANG Yi-Zhong, LIN Qiong-Gui

(School of Physics & Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** The general oscillation of a pendulum consists of a particle and a massive cord is studied. Analytic solutions for the displacement function under arbitrary initial conditions are given. The general oscillation involves higher modes as well as the ground mode. Existence of higher modes is the main feature of the cord pendulum in comparison with the compound pendulum. The generalized orthogonality of the eigenfunctions is proved and their modules are calculated. Then all coefficients in the general solution are worked out in terms of the initial conditions. Analytic eigenfrequencies are obtained approximately when the mass ratio of the particle to the cord is much larger or much smaller than 1. In the former case, the eigenfrequencies of higher modes increase in roughly the same way as the square root of the ratio, while the eigenfrequency of the ground mode tends to that of the simple pendulum. In the latter case, the eigenfrequencies are close to those of a massive cord. Numerical results for the first five eigenfrequencies are presented for general mass ratio. An error in the literature is pointed out.

**Key words:** pendulum; massive cord; general oscillation; analytic solution